La deuxième discontinuité de Klein : le cas de l'intégrale

Gaëtan Planchon

Université de Montpellier
5èmes journées des INSPE d'occitanie

26 juin 2023

Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Académie de Montpellier

IMAG Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck

Felix Klein, discours de 1872

- Double rupture dans les apprentissages des mathématiques chez les étudiants
  1. à l'entrée à l'université, après le lycée;
  2. à la sortie de l'université, en devenant enseignant du secondaire
- Seconde discontinuité
  - Difficulté pour le nouvel enseignant à percevoir les rapports entre les mathématiques à enseigner dans le secondaire et les connaissances universitaires plus avancées;
  - Organisation particulière de la formation des enseignants en France avec le Master MEEF : moment propice à la mise en lumière de liens entre les mathématiques universitaire et les mathématiques à enseigner.

Modélisation de la double discontinuité (Winsløw)

Carl Winsløw utilise l'idée de *rapport au savoir* introduit par Chevallard $R_I(x, o)$ d'un individu x à l'objet de savoir o au sein de l'institution I (ici, soit le lycée (L), soit l'université (U)) pour exprimer la double discontinuité:

$$R_L(s, o) \longrightarrow R_U(\sigma, \omega) \boxed{\longrightarrow} R_L(t, o)$$

La relation d'un individu x à l'objet de savoir o au sein de l'institution I sont décrits à travers un *Modèle Praxéologique de Référence* qui consiste en la reconstruction du savoir enseigné à l'aide de praxéologies mathématiques $[\Pi, \Lambda]$ où Π désigne la praxis, et Λ le logos;

Modélisation de la double discontinuité (Winsløw)

Le problème de Klein se modélise ainsi par :

$$R_L(s, o) \longrightarrow R_U(\sigma, \omega) \boxed{\longrightarrow} R_L(t, o)$$

Modélisation de la double discontinuité (Winsløw)

Le problème de Klein se modélise ainsi par :

$$R_L(s,o) \longrightarrow R_U(\sigma,\omega) \boxed{\longrightarrow} R_L(t,o)$$

$$R_L(s,o) \longrightarrow R_U(\sigma,\omega) \longrightarrow \boxed{R_U(\sigma_t,\omega\cup o)} \longrightarrow R_L(t,o)$$

Une question de recherche : quel type de connaissances complémentaires instaurant un nouveau rapport $R_U(\sigma_t,\omega\cup o))$ est à apporter sur les théories universitaires relatives à ω qui soit pertinent pour un futur enseignant au sens de Klein?

Choix d'un objet d'étude et élaboration des MPR

1. Choix d'un objet d'étude : l'intégrale
   - Rencontrée d'abord au lycée
   - A l'université avec l'intégrale de Riemann
   - A l'université avec la théorie de la mesure et l'intégrale de Lebesgue.
2. Elaboration d'un MPR pour l'intégrale du lycée, l'intégrale de Riemann et l'intégrale de Lebesgue à l'université

Construction de nouvelles praxéologies

La mise en relation entre les MPR relatifs à l'intégrale du lycée et l'intégrale à l'université a permis de mettre en avant une discontinuité :

- L'intégrale du lycée se fonde sur la notion *intuitive* d'aire
- Cette notion d'aire permet de justifier que toutes les fonctions continues admettent des primitives, ce qui conduit à une nouvelle définition de l'intégrale des fonctions continues
- Dans le cadre de l'intégrale de Riemann, la définition repose sur la notion de borne supérieure;
- L'intégrale de Lebesgue se fonde sur la théorie axiomatique de la mesure

Construction de nouvelles praxéologies

La mise en relation permet de constater les éléments suivants :

- Le changement du bloc théorique pour justifier une même technologie, le TFA;
- Une théorie des aires non formalisée pour justifier cet élément technologique pour l'intégral au lycée;
- La théorie de la mesure est un moyen de formaliser, pour les étudiants, une théorie axiomatique des aires;

Projet:

- Formalisation de nouvelles praxéologies à proposer aux étudiants pour instaurer un nouveau rapport $R_U(\sigma_t, \omega \cup o)$ avec l'objet de savoir dans l'institution universitaire;
- Ces praxéologies doivent mobiliser des éléments praxéologiques des organisations mathématiques relatives à l'intégrale de Riemann et à l'intégrale de Lebesgue
- Ces praxéologies doivent être reliées à des tâches de l'enseignant

Un dispositif expérimental sous la forme d'une AER

- Une pré-expérimentation sous la forme d'un problème de CAPES;
- Expérimentation sous forme d'une AER en M1 MEEF à Montpellier
- Étudiants (presque tous) titulaires de la L3 de mathématiques de Montpellier
- Équipement praxéologique est modélisé par les MPD

Un dispositif expérimental sous la forme d'une AER

- Une pré-expérimentation sous la forme d'un problème de CAPES;
- Expérimentation sous forme d'une AER en M1 MEEF à Montpellier
- Étudiants (presque tous) titulaires de la L3 de mathématiques de Montpellier
- Équipement praxéologique est modélisé par les MPD

Le premier document, le guide d'AER, pose la notion de mesure des aires, définie axiomatiquement (que l'on trouve dans les travaux de Lebesgue et qui a été reprise par Perrin) :

> *On suppose qu'il existe un sous-ensemble $\mathcal{Q}$ de $\mathbb{R}^2$ qui contient les points, segments, polygones, stable par intersection et union finie. Une mesure des aires est une application μ définie sur $\mathcal{Q}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ simplement additive, invariante par isométrie, et telle que la mesure du carré $[0,1[\times[0,1[$ est 1.*

Cette notion est constitutive du logos des nouvelles praxéologies que l'on vise à développer. On notera ce logos Λ^*_M.

Un dispositif expérimental sous la forme d'une AER

Trois tâches sont proposées

- t_1 : Démontrer que μ est une mesure diffuse, au sens de la théorie de la mesure, c'est-à-dire que la mesure d'un point est toujours nulle;
- t_2 : Que vaut la mesure d'aire d'un rectangle?
- t_3 : Réécrire la preuve du TFA extraite d'un manuel de terminale avec le niveau de rigueur de l'université.

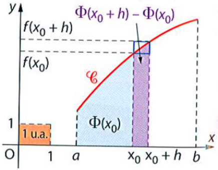
La preuve du TFA

f est une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a\,;b]$.
Alors, la fonction $\Phi : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $[a\,;b]$ et $\Phi' = f$.

Principe de la démonstration. On se place dans le cas où f est croissante sur $I = [a\,;b]$.

x_0 et h sont deux nombres : $x_0 \in I$, $h \neq 0$ et $x_0 + h \in I$.

- Si $h > 0$, comme f est croissante, $f(x_0) \leqslant f(x_0+h)$.
$\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)$ exprime l'aire sous $\mathscr{C}$ sur $[x_0\,;x_0+h]$.
On encadre cette aire par celles de deux rectangles de même largeur h et de hauteurs $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$:
$h \times f(x_0) \leqslant \Phi(x_0+h) - \Phi(x_0) \leqslant h \times f(x_0+h)$.
D'où : $f(x_0) \leqslant \dfrac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$.



- Si $h < 0$, on démontre de même que : $f(x_0+h) \leqslant \dfrac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} \leqslant f(x_0)$.
- Or, f est continue en x_0, donc $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$. Donc, d'après le théorème d'encadrement :

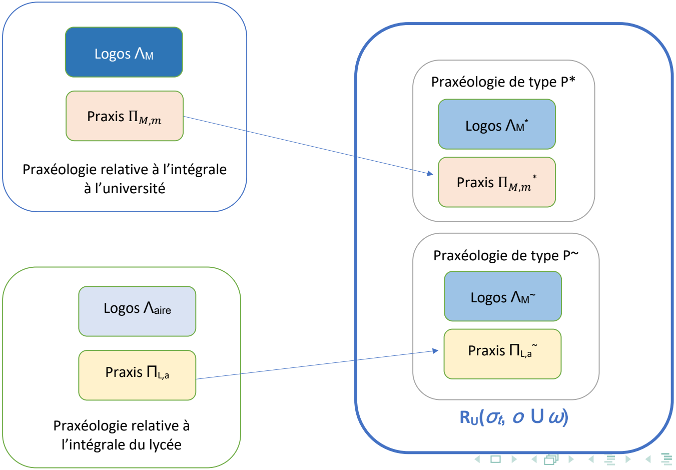
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} = f(x_0)$. Ainsi, Φ est dérivable en x_0 et $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.
Ce résultat est vrai pour tout x_0 de $[a\,;b]$, donc Φ est dérivable sur $[a\,;b]$ et $\Phi' = f$.

Figure:

Etude empirique

- L'analyse a priori et a posteri a été menée avec les outils du question-gramme et du schema herbartien
- L'analyse a priori permet de rendre compte de la pertinence des outils pour mettre en lumière les liens entre des mathématiques de l'université et des mathématiques du secondaire;
- Un exemple de praxéologie de Klein de type P^*, et un de type $P^\sim$
- Les praxéologies de type $P^\sim$ visent à être reliées aux pratiques enseignantes (ici à travers la tâche t_3)
- Le développement des praxéologies de Klein a engendré une adaptation des moments de l'étude à ces nouvelles praxéologies
- L'utilisation des outils pour l'analyse a posteriori permet de mettre en lumière les points de blocage au développement des praxéologies de Klein.

Les praxéologies de Klein



Apports, limites, et perspectives

- Formalisation d'un nouveau type de praxéologies (les praxéologies de Klein) à développer en formation des enseignants:
  - Qui mobilise des mathématiques du supérieur et du secondaire
  - Qui peut se transposer à d'autres objets de savoir
  - Qui mobilise aussi des tâches d'enseignants
- Le type de tâche $P^{\sim}$ est relié à des pratiques... imaginées : nécessité de croiser l'étude avec des observations des pratiques enseignantes
- Etude des effets produits sur les pratiques des enseignants